ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

# CONCOURS D'ENTREE 1992

## DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

### OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

**DUREE : 3 heures**

N.B : *Ce sujet comporte 3 pages de texte.*

### A. EXERCICE

On cherche à déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_C(4)$ vérifiant :

$$(M^2 + M + Id)(M - 2Id)^2 = 0$$
$$(M^2 + M + Id)(M - 2Id) \neq 0$$
$$(M - 2Id)^2 \neq 0$$

où Id est la matrice unité.

1. Chercher les valeurs propres possibles d'une telle matrice.

2. Y a-t-il des solutions diagonalisables ?

3. Déterminer une solution qui soit triangulaire supérieure.

### B. PROBLEME

*Les parties I, II, III peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.*

I

Soit $\beta$ un nombre réel et soit x un réel positif. On pose :

$$F_\beta(x) = \int_x^1 e^{-t}\, t^\beta \, dt.$$

1. On désigne par $\Gamma_\beta$ la courbe représentative, pour $0 < x \leq 1$, de la fonction $F_\beta(x)$.
Donner l'abscisse des points d'inflexion de $\Gamma_\beta$ quand il en existe, ainsi que les pentes des tangentes en ces points.
On fait tendre x vers 0 par valeurs positives. Discuter, suivant la valeur de $\beta$, si $F_\beta(x)$ a une limite finie ou infinie et trouver la limite de $F'_\beta(x) = \dfrac{dF_\beta}{dx}$.
Indiquer au moyen de quatre figures distinctes l'allure de $\Gamma_\beta$ dans les cas suivants : $\beta \leq -1$, $-1 < \beta < 0$, $\beta = 0$ et $\beta > 0$.

2. Etablir une relation entre $F_{\beta+1}$ et $F_\beta$.
Calculer $F_3$.

II

Le nombre $\beta$ est un nombre reel donne. On considère l'équation différentielle :

$$(E_\beta) \qquad x\frac{d^2z}{dx^2} - (x+\beta)\frac{dz}{dx} + \beta z = 0.$$

1. Trouver une fonction $z_o$ telle que $z_o(0) = 1$ et qui, quel que soit le choix de $\beta$, soit solution de l'équation $(E_\beta)$.

2. A l'aide du changement de fonction $z = z_o u$, trouver pour $x > 0$ la solution générale de l'équation $(E_\beta)$ et l'exprimer à l'aide de la fonction $F_\beta$ définie en I.

3. Quelle est la solution $z(x)$ de $(E_3)$ définie sur $]0, +\infty[$ qui vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{z(x)}{x^3} = 1 \ ?$$

III

Soit $\alpha$ un nombre réel qui n'est pas un entier négatif ou nul.

1. Déterminer les coefficients d'une série entière non identiquement nulle :

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

solution de l'équation différentielle

$$(E'_\alpha) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha-x)\frac{dy}{dx} - y = 0.$$ Quel est son rayon de convergence ?

On désignera par $g_\alpha(x)$ la somme de cette série.
Préciser la fonction $g_1$.

2. Etablir une relation simple entre les fonctions $g_{\alpha+1}$ et $g_\alpha$.
Pour $p$ entier supérieur ou egal à 1, calculer $g_p(x)$. Trouver, quand l'entier $p$ tend vers $+\infty$, la limite de $\frac{x^p}{p!}\, g_{p+1}(x)$.

IV

On suppose que $\alpha$ est un nombre reel quelconque et que la variable reelle $x$ est positive.

1. Déterminer une fonction $u$ telle qu'en effectuant le changement de fonction $y(x) = u(x)z(x)$ dans $(E'_\alpha)$ on est ramené à chercher une fonction $z$ solution de l'équation différentielle $(E_\beta)$ pour une valeur $\beta$ qu'on calculera.

2. Déterminer la solution générale de l'équation $(E'_\alpha)$.

3. Quelles sont les solutions de $(E'_5)$ qui tendent vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

4. Si $\alpha$ n'est pas un entier négatif ou nul, prouver que la fonction $e^{-x}x^{\alpha-1}g_\alpha(x)$ a une limite finie $C_\alpha$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
Etablir une relation entre $C_\alpha$ et $C_{\alpha+1}$.